

Modelización de la tasa de interés para la evaluación del riesgo de tasa de interés mediante modelos de Valor a Riesgo (VaR)

Elena Grubisic – Guillermo Escudé*

Banco Central de la República Argentina

Julio 1999

* Las opiniones expresadas en este documento son de los autores y no coinciden necesariamente con las del Banco Central de la República Argentina.

Modelización de la tasa de interés para la evaluación del riesgo de tasa de interés mediante modelos de Valor a Riesgo (VaR)

Elena Grubisic y Guillermo Escudé¹
Julio de 1999

1. Introducción

El riesgo de tasa de interés (RTI) es el riesgo de que los cambios en la tasa de interés puedan afectar negativamente a la situación económica de una entidad financiera. Los bancos están expuestos al RTI siempre que exista un descalce entre el plazo promedio de los activos y el de los pasivos.

Si los activos tienen en promedio mayores plazos que los pasivos, un aumento en la tasa de interés tiene el efecto de disminuir los ingresos netos por intereses debido al aumento en el costo del financiamiento. Si tal aumento en la tasa de interés es permanente, el valor económico del banco se ve afectado negativamente ya que disminuye el valor presente de sus ingresos futuros. A diferencia de lo que ocurre con activos que tienen precios de mercado, el efecto negativo no queda registrado en el balance de la entidad excepto a través de la cuenta de resultados. De tal modo, el efecto pleno del aumento en la tasa de interés sólo se va observando a través del transcurso del tiempo.

Las entidades financieras tienen diversas maneras de administrar el RTI. Pueden acotar su exposición al mismo al determinar los plazos de sus préstamos, las tasas de interés activas, el carácter fijo o variable de la tasa de interés y en el caso de la tasa de interés variable, la frecuencia del ajuste de tasa y la elección de la tasa de referencia. También pueden determinar su nivel de capital óptimo teniendo en cuenta el RTI junto con los demás riesgos a los que están expuestas. Además, pueden hacer uso de diversos instrumentos financieros derivados, como pases de tasa de interés, futuros u opciones, cuando existen tales mercados, para reducir el RTI. No obstante, como en el caso de otros riesgos, como el crediticio o el de mercado (para activos mercadeables y líquidos) el RTI presenta un fuerte desafío a la autoridad regulatoria.

El RTI puede ser encarado de maneras diversas por el ente regulador. En primer lugar puede restringirse la intervención a los casos extremos de descalce mediante medidas discrecionales de la agencia de supervisión. En segundo lugar puede imponerse límites cuantitativos al descalce. En tercer lugar puede establecerse un (o adaptarse el) requisito de capital mínimo que sea creciente con la exposición al RTI. En cualquier caso deberá establecerse una metodología de medición del RTI.

¹ Los autores agradecen a George McCandless por la detallada revisión del trabajo y las sugerencias aportadas.

A principios de 1993 el Comité de Basilea sobre Supervisión Bancaria emitió un documento planteando la necesidad de medir el RTI de las entidades financieras. Su enfoque fue similar a proyectos anteriores de la Reserva Federal de EE.UU. en el sentido de establecer un sistema de medición del RTI enfocado hacia la detección de los casos extremos ("outliers"). El comité dejaba a cada Banco Central en libertad de decidir qué medidas tomar en el caso de detección de entidades altamente expuestas al RTI.

El enfoque usado para medir el RTI, tanto en la propuesta de Basilea como en el caso estadounidense consistía en economizar tanto los requerimientos de información como los cálculos. Para ello se hacía una clasificación de los activos, pasivos y posiciones fuera del balance agrupándolos en algunas pocas categorías amplias basadas en las características de los flujos de fondo contractuales (por ejemplo: distinguiendo los activos con amortizaciones periódicas de las que se amortizan íntegramente al final) y en el vencimiento (en el caso de préstamos a tasa de interés fija) o fecha de ajuste de tasa de interés (en el caso de préstamos a tasa de interés variable). De tal forma se obtenía una matriz con una fila para cada tipo de activo, pasivo o posiciones fuera del balance y una columna para cada banda temporal según fecha de vencimiento o de reajuste de tasa de interés y cada casillero tenía el monto total de la categoría correspondiente. El paso siguiente consistía en ponderar el monto de cada casillero por un coeficiente que representaba la sensibilidad del valor económico del instrumento en cuestión a las variaciones en la tasa de interés.

Para la determinación de los ponderadores se usaba el concepto de duración de un activo financiero, el que se obtiene mediante un promedio ponderado de los plazos de vencimiento de todos los pagos involucrados (capital e intereses) y representa la elasticidad del valor económico del activo (valor presente de los flujos futuros) con respecto a la tasa de interés. Como en las aplicaciones se trabaja con tiempo discreto, la "duración modificada" (DM) modifica levemente el cálculo para tomar en cuenta que el interés puede componerse un número discreto de veces en el año ².

La DM, entonces, da una medida de la reducción porcentual en el valor económico de un activo como consecuencia de una suba de un punto porcentual en la TIR del mismo. La DM es por consiguiente un multiplicador que traduce la volatilidad (o desvío estándar) de la tasa de interés en la volatilidad del precio del activo y, por ello, da una medida del RTI del activo.

Al ponderar cada casillero de la matriz por un coeficiente de ponderación obtenido a partir de la DM de un instrumento considerado representativo de los activos en el casillero y luego sumar los

² Se decidió dejar de lado la teóricamente posible aunque poco frecuente exposición a la baja de tasa de interés por parte de bancos con activos de menor duración que sus pasivos. En el caso de los pasivos (activos) a tasa variable, se incluye el (un porcentaje del) flujo de fondos hasta la fecha de ajuste en la tasa, si la tasa de referencia es de origen doméstico. Si la tasa de referencia es de origen externo se incluye todo el flujo de fondos por considerarse que una parte menor de la volatilidad de tasas domésticas se origina en el exterior, por lo cual el caso se asemeja al de tasa de interés fija.

números resultantes para los activos y restar los correspondientes para los pasivos se obtenía una medida de la sensibilidad del VP de todo el "banking book" a los cambios en la tasa de interés.

Luego se construía la distribución de la exposición al RTI de todas las entidades financieras del sistema, y el regulador debía adoptar un criterio para seleccionar los extremos. Por ejemplo, podía tomar un intervalo alrededor del banco con la exposición mediana para así obtener las dos colas de la distribución. Los bancos en la cola derecha serían aquellos con mayor exposición positiva y por consiguiente, aquellos expuestos a subas en la tasa de interés. En cambio, los bancos en la cola izquierda serían aquellos con exposición negativa y, por lo tanto, expuestos a las bajas en la tasa de interés. Mediante este método los supervisores podrían determinar "off-site" cuales son los bancos más expuestos al RTI. Podrían entonces pedirles información adicional o bien concentrarse en los métodos de administración del riesgo usados por los bancos en cuestión durante las examinaciones "on-site".

A lo largo de 1998 el BCRA retomó el estudio del RTI con la intención de establecer un requisito de capital para afrontar el RTI de las entidades financieras³. Se estudió el proyecto de la Reserva Federal como forma posible de implementar un requisito de capital más bien que como forma de detectar los bancos más expuestos. Pero se decidió que sería más exacto y directo calcular la exposición al RTI en base a un modelo de Valor a Riesgo (VaR) simplificado, aunque ello implicara una mayor carga informativa para las entidades. Con tal enfoque, en lugar de clasificar los activos y pasivos en una matriz, como en el proyecto de la Reserva Federal, los bancos deben establecer los flujos de fondos generados por los activos y pasivos y calcular el VP de los mismos así como el impacto que las subas en la tasa de interés tienen sobre el mismo a través de una fórmula sencilla⁴. Usar para ello las ideas básicas de los modelos de VaR implica obtener una estimación de la máxima pérdida potencial de un banco ante subas en la tasa de interés en un horizonte de tiempo dado y con un nivel de confianza que se estableció en el 99% (o de tolerancia al riesgo del 1%). La pérdida en cuestión es la disminución del VP de los flujos de fondos generados por los activos y pasivos existentes, sin hacer supuestos sobre nuevas operaciones hacia adelante. Por consiguiente, el período total a considerar es el del activo más largo. Se optó por un horizonte de tres meses pues se consideró que éste es un período suficientemente largo como para que un banco adopte mecanismos que le disminuyan su exposición al RTI o bien consiga el capital necesario para enfrentar su exposición (o ambos).

³ El tema había sido estudiado desde hacía varios años pero no había llegado a plasmarse en una regulación.

⁴ La duración de un instrumento es:

$$D = \sum_{t=1}^n \frac{VP(FF_t)}{VPT} t$$

donde VP (FF_t) es FF_t / (1 + K)^t (o sea, el valor presente del flujo de fondos en el período t) y VPT es el valor presente de todo el flujo de fondos del instrumento. La duración modificada del instrumento es D / (1 + R/c) donde R es la TIR del instrumento y c es el número de veces que se compone el interés en el año (c=2 si hay un cupón o amortización cada 6 meses). Se observa que si D es la elasticidad del precio del activo con respecto a la tasa de interés y c=1, entonces DM es la semielasticidad del precio del activo con respecto a la tasa de interés.

Además se optó por centrar los parámetros básicos de la regulación (que como se verá, giran en torno a la volatilidad de los cambios en la tasa de interés) en el comportamiento de la tasa de interés sobre los depósitos a plazo fijo entre 30 y 59 días, por considerar que éstos constituyen la principal fuente de fondos de las entidades. Como se verá más abajo, los niveles y las volatilidades de las series de tasas de los depósitos a plazo fijo difieren significativamente según que sean en pesos o en dólares. Por consiguiente, en la norma se calculan por separado los flujos en pesos y los flujos en dólares.

En este trabajo se hace un análisis empírico del comportamiento de las series de tasas de interés de los depósitos a plazo fijo de Argentina con el objeto de encontrar un marco teórico básico para la determinación de los parámetros a utilizar en la regulación.

Se usan series mensuales que abarcan el período desde abril 1993 hasta julio de 1998, haciéndose una corrección de los valores extremos de la crisis del Tequila y de la crisis asiática de fines de 1997. Se comparan las distribuciones de las series de tasas con las distribuciones normal y lognormal, comprobándose la intuición de que ninguna de estas distribuciones caracteriza adecuadamente el comportamiento de las series. Usando el test ADF, no pudo rechazarse la existencia de una raíz unitaria y de autocorrelación cuando se toman las series en sus niveles. En cambio, sí se rechaza la no-estacionariedad cuando se usan las primeras diferencias. El análisis de las series en diferencia muestra que hay autocorrelación significativa según el estadístico Q de Box-Ljung. Además, en el caso de la serie en pesos también se comprobó la existencia de autocorrelación en la varianza.

Se estiman tanto modelos AR(1) como GARCH(1,1), luego de hacer una reseña de las principales características de ambos. En el modelo GARCH se incluye un término autorregresivo en la ecuación correspondiente a la media. Se muestra, además, cómo puede adaptarse el modelo VaR simplificado al caso de una varianza condicional que es variable en el tiempo, como sucede en los modelos de tipo GARCH.

El resultado de las estimaciones econométricas muestra que en todos los casos las “dummies” para los valores extremos son muy significativas. En las estimaciones correspondientes a la tasa en pesos, la variable dependiente rezagada no resultó significativa. Además, según el test de Jarque-Bera los residuos resultaron normales para los modelos aplicados a las tasas en pesos pero no así para el caso de las tasas en dólares (la discrepancia con la normal es menor en el modelo GARCH). Sin embargo, en todos los casos los residuos no tienen autocorrelación significativa. Además, en el caso del modelo GARCH los residuos estandarizados tienen media y varianza aproximadamente igual a cero y uno, respectivamente, lo que coincide con los supuestos del modelo. Los valores de log-verosimilitud son algo mayores en el caso de los modelos GARCH, indicando un mejor ajuste.

Los parámetros de la ecuación autoregresiva en la varianza condicional del modelo GARCH indican una elevada persistencia de los shocks. Excepto en períodos de crisis, se comprueba un buen poder predictivo (a un paso) de los modelos GARCH.

Posteriormente se muestra cómo puede adaptarse el marco teórico al uso de un horizonte temporal mayor a un mes, lo que se complica debido a la posible existencia de un término autoregresivo en la ecuación para la media del modelo GARCH. Los pasos más complicados de la demostración se incluyen en dos apéndices. En base a los parámetros estimados, se calculan los valores de los parámetros a utilizar en la fórmula del VaR (o sea, de la exigencia de capital por RTI) para el caso de un horizonte de tres meses.

En una última sección se comprueba que existe causalidad de Granger entre algunas tasas de interés internacionales y las de los depósitos a plazo fijo, desde las primeras a las segundas. En particular, la tasa de los fondos federales de EE.UU. (equivalente a la tasa interbancaria doméstica) causa en el sentido de Granger a las tasas de depósitos a plazo fijo tanto en pesos como en dólares. Por ello, se introduce la tasa de fondos federales (rezagada en uno y dos meses) como variable explicativa en el modelo GARCH. Estas variables resultan muy significativas en ambas regresiones. La probabilidad de normalidad de los residuos según el test de Jarque-Bera aumenta en el caso de la tasa en dólares. Sin embargo, los coeficientes GARCH pierden significatividad, sobre todo en el caso de la tasa en dólares, lo que torna dudoso el beneficio de la incorporación de estas variables.

2. Modelo VaR simplificado para evaluar el RTI

El riesgo por tasa de interés (o riesgo por descalce de plazos) que enfrenta un banco, es el riesgo de que su condición económica se vea afectada por cambios adversos e inesperados en las tasas de interés de mercado. Este riesgo existe cuando la sensibilidad de los activos de una entidad ante cambios en las tasas de interés no coincide con la sensibilidad de sus pasivos. Si los activos tienen mayor duración que los pasivos y están a tasa fija, un aumento en la tasa de interés reduce los ingresos netos por intereses. Los flujos originados en activos a tasa variable se ven afectados durante el período que se extiende hasta la fecha de ajuste en la tasa.

Este trabajo se concentra exclusivamente en el “banking book” de un banco, ya que los activos del “trading book” tienen precios de mercado que reflejan los cambios en las tasas de interés y están contemplados en el requisito de capital por riesgo de mercado⁵. El valor económico de los activos y pasivos que están en el “banking book” está definido por el valor presente del flujo de fondos generado por ellos, descontado este flujo a la tasa de fondeo que corresponde a cada período.

Supóngase que la curva de rendimientos es plana, por lo cual en cada período los agentes económicos esperan que la tasa de interés vigente se mantenga en todos los períodos futuros. Sea

⁵ Véase Powell y Balzarotti (1996).

$$VP = \sum_{t=0}^T \frac{FF_t}{(1+R)^t}$$

el valor presente del flujo de fondos de un banco, donde:

R es la tasa de fondeo

FF_t es el flujo de fondos en el período t.

El cambio en el valor presente (dVP) de un activo producido por un cambio en la tasa de fondeo puede aproximarse linealmente mediante:

$$\begin{aligned} dVP &= \sum_{t=0}^T -t(1+R)^{-t-1} FF_t dR \\ &= -\left(\sum_{t=0}^T \frac{tFF_t}{(1+R)^t}\right) \frac{dR}{1+R} \\ &= -VP \left(\frac{\sum_{t=0}^T \frac{tFF_t}{(1+R)^t}}{\sum_{t=0}^T \frac{FF_t}{(1+R)^t}}\right) \frac{dR}{1+R} \\ &= -VP \frac{D}{1+R} dR \\ &= -VP MD dR \end{aligned}$$

donde :

D es la duración del balance

MD es la “duración modificada” (=D/(1+R)).

Usando el hecho que en tiempo continuo D es la elasticidad del valor presente de un instrumento financiero con respecto a la tasa de descuento, es decir:

$$\frac{\partial VP_t}{\partial(1+R_t)} \frac{1+R_t}{VP_t} = -D_t,$$

puede aproximarse esta expresión mediante :

$$\frac{VP_{t+1} - VP_t}{(1+R_{t+1}) - (1+R_t)} \frac{1+R_t}{VP_t} = -D_t,$$

lo cual es equivalente a:

$$\frac{VP_t - VP_{t-1}}{VP_{t-1}} = -D_{t-1} \frac{(1 + R_t) - (1 + R_{t-1})}{1 + R_{t-1}},$$

o sea :

$$\Delta VP_t = -VP_{t-1} MD_{t-1} \Delta R_t \quad (1).$$

Supóngase en primer lugar que ΔR_t sigue una distribución $N(\mu, \sigma^2)$ ⁶. Como V_{t-1} y MD_{t-1} se conocen al momento t , la distribución condicional de ΔVP_t también es normal:

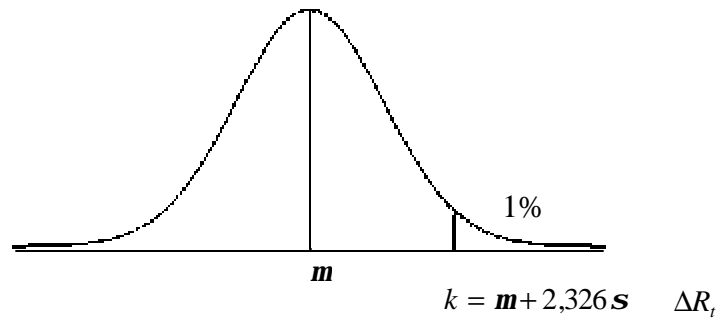
$$\Delta VP_t \sim N(-VP_{t-1} MD_{t-1} \mu, VP_{t-1}^2 MD_{t-1}^2 \sigma^2).$$

El interés principal del presente trabajo se centra en encontrar una metodología para evaluar el valor a riesgo (VaR) debido al RTI, o sea, la pérdida máxima potencial que se supera sólo en un $x\%$ de los casos, donde x es el nivel de tolerancia (o $100-x$ el nivel de confianza). Si se considera las distribuciones de ΔR_t y ΔVP_t se observa que cuando ΔR es muy alto ΔVP es muy bajo. Como ΔR se distribuye según una normal $N(\mu, \sigma^2)$, el valor crítico que sólo es superado por ΔR en el $(x=)$ 1% de las veces es $(k=) \mu + 2,326\sigma$. Como ΔVP también se distribuye normalmente, estaría 2,326 veces la varianza por debajo de su media sólo en el 1% de los casos. Este desvío crítico con respecto a la media es el VaR, o sea :

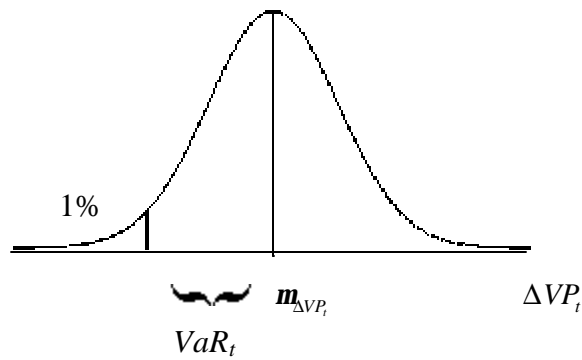
$$VaR_t = 2,326 VP_{t-1} MD_{t-1} \sigma.$$

⁶ Como indica la intuición, se comprobará más abajo que la serie ΔR_t difiere sustancialmente de una normal. El interés del supuesto en esta sección es presentar las ideas básicas del modelo VaR simplificado para luego adaptarlo a una mejor caracterización de la serie.

Distribución de ΔR_t



Distribución de ΔVP_t



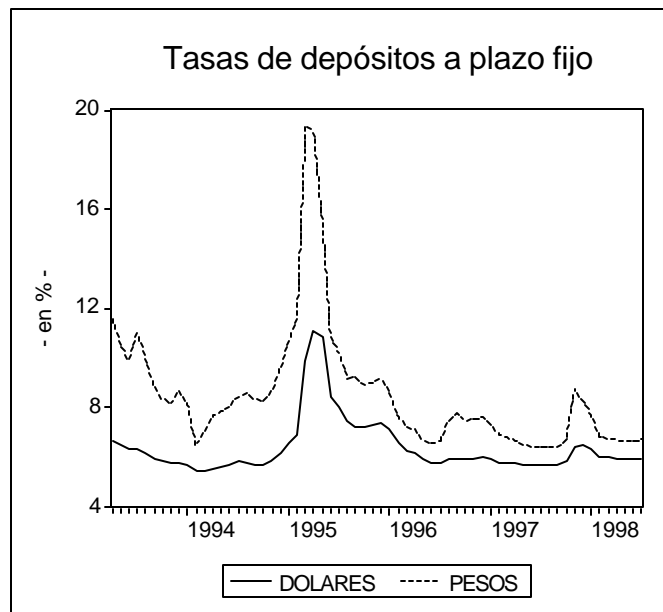
La idea motriz es que el valor esperado de la reducción en el valor presente a raíz de un aumento en la tasa de interés puede ser tenido en cuenta al establecer las tasas de interés activas y, por consiguiente, no presenta riesgo. El RTI, en cambio, está generado por la posibilidad de que la reducción en el valor presente sea mayor que el valor esperado. Por ello, el desvío entre la máxima caída que se desea cubrir mediante el requisito de capital y el valor esperado de esa caída representa el VaR.

3. Comportamiento de la tasa de interés pasiva

Para poder medir el riesgo de tasa de interés es necesario conocer el comportamiento de las tasas de interés, en particular su volatilidad y la magnitud del efecto de un shock como así también su persistencia en el tiempo. Por ello, en esta sección se efectúa un estudio de series de tiempo de la experiencia argentina en los últimos años. Las series consideradas son las de la tasa de interés para los depósitos a plazo fijo en pesos y dólares (de 30 a 59 días) ya que son las más representativas del fondeo de los bancos. El período de análisis va desde abril de 1993 hasta julio de 1998 y la frecuencia es mensual.

Observando el Gráfico 1, donde ambas series se presentan en niveles, se nota un comportamiento similar en ambas: un descenso paulatino de sus valores con aumentos bruscos en el "tequila" y en la crisis asiática de fines de 1997. El coeficiente de correlación de Spearman entre ambas series es 0,677.

Gráfico 1



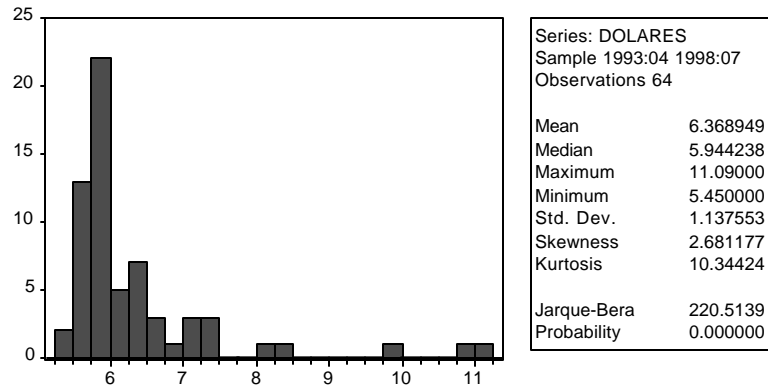
En el Gráfico 2 se observan las distribuciones de las series así como estadísticos descriptivos. Se observa que la serie en pesos tiene un coeficiente de variación (desvío estándar/media) más alto (0.30) que la serie en dólares (0.18). Además ambas presentan gran sesgo (skewness) y kurtosis, en relación con una normal.

El test de Jarque-Bera compara las distribuciones de las series de tasas de interés con una distribución normal. Se observa que en ambas series hay una marcada diferencia con respecto a la distribución normal. También se comparan las series de tasas con una distribución lognormal,

encontrándose que la de dólares difiere significativamente de la misma, mientras que la de pesos difiere sólo al 6%.

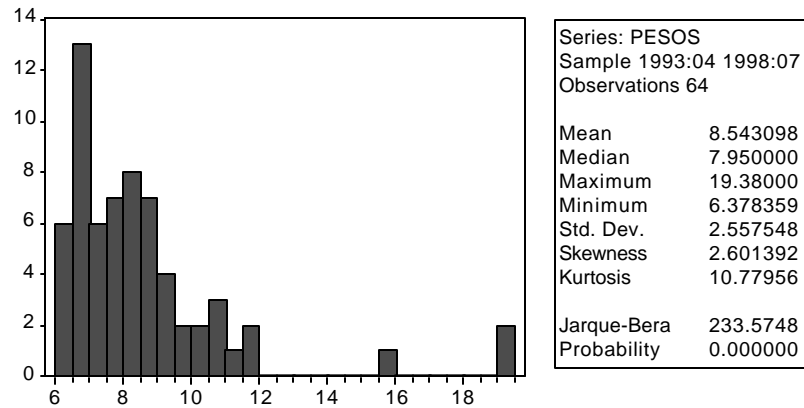
Gráfico 2

Tasa de los depósitos a plazo fijo en dólares



distribution : Lognormal
 Chi Square(2) : 36.16
 probability: 0.0000

Tasa de los depósitos a plazo fijo en pesos



distribution : Lognormal
 Chi Square(2) : 5.522
 probability: 0.0633

Como las series no son normales, cabe preguntarse si lo son las primeras diferencias. Tal es el caso del modelo "random walk":

$$R_t = R_{t-1} + \varepsilon_t, \quad \varepsilon_t \sim N(0, \sigma^2)$$

donde los ε_t no tienen correlación serial (o sea, ε_t es "ruido blanco")⁷. Cuando la tasa de interés es un "random walk", la primera diferencia constituye "ruido blanco". La serie en niveles no tiene tendencia clara a subir o bajar. Tampoco tiende a volver a un valor medio. Las perturbaciones (dadas por ε_t) persisten en el tiempo. Las series que siguen este modelo son no estacionarias y se suelen denominar integradas de orden uno o I(1). Nótese que en este caso la tasa no está acotada.

El modelo random walk es un caso límite de un modelo más general, el autoregresivo de orden uno (AR(1)), en el cual las perturbaciones producen cambios pero la tasa vuelve eventualmente a su nivel promedio:

$$R_t = \gamma R_{t-1} + \varepsilon_t \quad (0 < \gamma < 1), \quad \varepsilon_t \sim N(0, \sigma^2).$$

Cuanto más cerca de 1 está γ más perdurarán los shocks en el tiempo, o sea, más persistencia tendrán.

Un test que a menudo permite descartar que se está ante un random walk es el test de Dickey-Fuller, donde las hipótesis nula y alternativa son:

$$H_0: \delta = 0, \quad H_1: \delta < 0, \quad (\text{i.e. } H_0: \text{random walk})$$

en un modelo
$$\Delta R_t = \delta R_{t-1} + \varepsilon_t \quad (2)$$

lo que equivale a
$$R_t = (1 + \delta) R_{t-1} + \varepsilon_t,$$

donde ε_t es ruido blanco. Para verificar la significatividad, dado que la distribución del parámetro es sesgada hacia los valores negativos, en lugar de realizarse un test t de Student, como sería habitual en estos casos, se utilizan tablas alternativas obtenidas en base a simulaciones (si el modelo tuviera incorporada una constante, las tablas a utilizar serían diferentes).

Algo que no tiene en cuenta el test original de Dickey-Fuller es la posibilidad de que exista autocorrelación en el término del error (ε_t). Si ε_t posee autocorrelación (por lo cual no es ruido blanco),

⁷ No es imprescindible la normalidad para el ruido blanco. Hendry llama "ruido blanco estricto" a un proceso estocástico $\{\varepsilon_t\}$ tal que para todo t ε_t tiene media nula y varianza finita y para todo par t, s la covarianza entre ε_t y ε_s es nula.

entonces los estimadores obtenidos por Mínimos Cuadrados Ordinarios (MCO) no son eficientes (i.e. de menor varianza). Una solución es agregar al modelo (2) rezagos de la variable dependiente para aproximar la autocorrelación. Se incorpora el número de rezagos necesarios para eliminar la autocorrelación y a su vez no perder grados de libertad. Este test se denomina test de Dickey-Fuller Aumentado (ADF) y para verificar la significatividad del parámetro γ en este nuevo modelo se utilizan las mismas tablas que en el caso del test común. El modelo es:

$$\Delta R_t = \delta R_{t-1} + \sum_{i=1}^k \Delta R_{t-i} + \varepsilon_t$$

Los resultados obtenidos para las series de tasas de interés se presentan en el cuadro siguiente:

Tabla 1

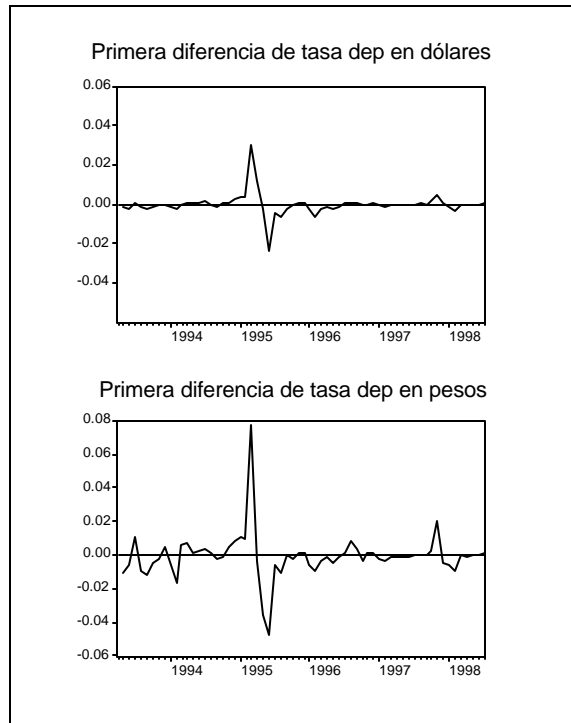
Test de Dickey-Fuller Aumentado (2 rezagos)		
Hipótesis nula: existencia de una raíz unitaria		
	ADF Test stat.	Valor Crítico (10%)
Series en niveles		
Tasa en dólares	-2.659	-2.592
Tasa en pesos	-2.567	-2.592
Series en niveles (*)		
Tasa en dólares	-2.060	-2.592
Tasa en pesos	-2.270	-2.592
Primera diferencia (*)		
Tasa en dólares	-5.387	-2.592
Tasa en pesos	-6.417	-3.170

(*) Previa corrección de extremos

Los valores extremos ("outliers") que fueron corregidos tienen lugar en marzo y junio de 1995 y noviembre de 1997 para la tasa en dólares y en marzo, mayo y junio de 1995 y noviembre de 1997 para la tasa en pesos. La corrección se realizó con MCO y las series que luego se analizaron son los residuos de esta regresión.

De los resultados del test se puede concluir que si se toma a las series en niveles y se tiene en cuenta la corrección por extremos no puede rechazarse la no estacionariedad de las series de tasas de depósitos tanto en dólares como en pesos. En cambio, cuando se hace el test para las primeras diferencias de las series se rechaza la no estacionariedad. Por ello, lo apropiado es continuar con el análisis de las primeras diferencias de las series, las que se observan en el Gráfico 3.

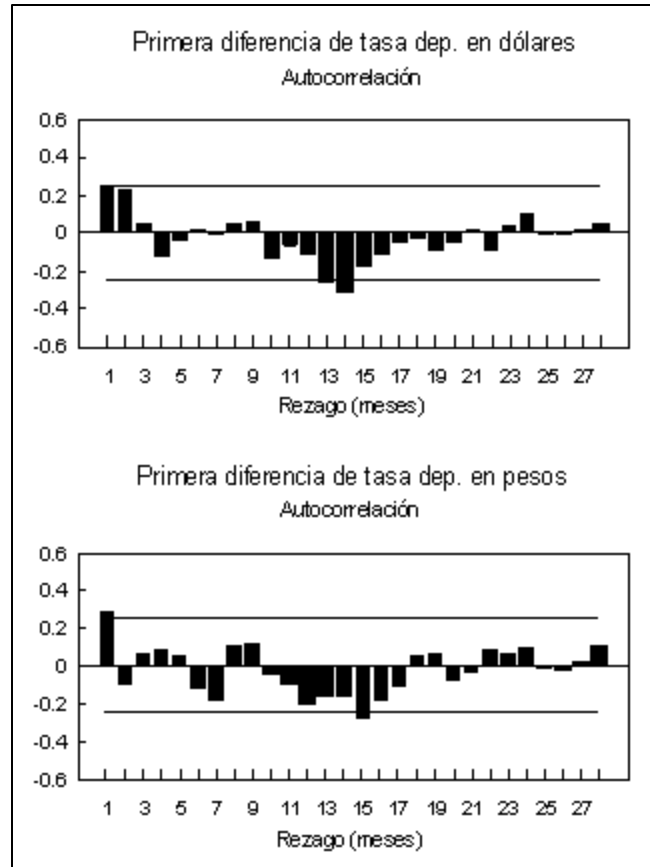
Gráfico 3



Al observar los gráficos se comprueba que los valores fluctúan alrededor de la media, que es aproximadamente cero (del orden de 10^{-4}). Además, hay períodos de gran amplitud y otros donde la misma no es tan grande, lo que lleva a sospechar que la volatilidad no se mantiene constante. Además, hay períodos de varios meses en que las curvas permanecen por encima (o por debajo) de la media, lo que lleva a sospechar de que hay autocorrelación. También cabe testear si la varianza presenta autocorrelación.

Los gráficos de las autocorrelaciones muestran que en ambas series existen algunos rezagos con correlación significativa, aunque casi todos los valores se encuentran dentro de una banda de confianza del 95%.

Gráfico 4



También se puede verificar la significatividad conjunta de las correlaciones con el estadístico Q de Box-Ljung, que se distribuye como $\chi^2(p)$ y se define como:

$$Q = T(T+2) \sum_{k=1}^p \frac{p_k^2}{T-k}$$

donde p_k es la autocorrelación de observaciones que distan k períodos. Se observa en la Tabla 2 que, considerados en forma conjunta, los 16 primeros rezagos poseen autocorrelación significativa al 5%.

Tabla 2

Estadístico de Box-Ljung		
Serie	Q-stat(16 rezag.)	Probabilidad
Tasa en dólares	28.656	0.026
Tasa en pesos	29.851	0.019

Para verificar la existencia de autocorrelación en la varianza se analizan los coeficientes de correlación de las series de las diferencias al cuadrado (luego de corregir por extremos). Se analiza estas series debido a que como:

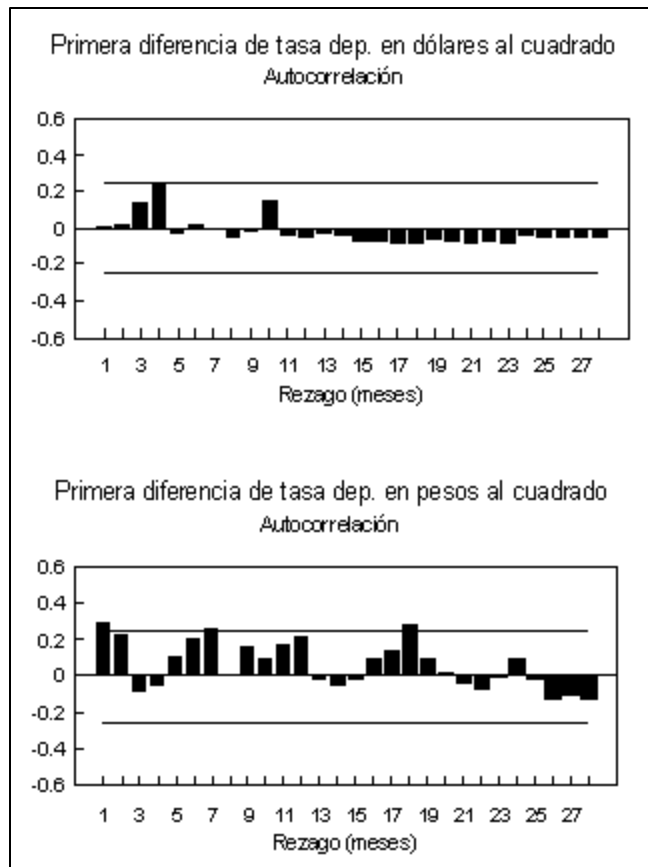
$$\sigma^2 = E[y_t - E[y_t]]^2 = E[y_t^2] - (E[y_t])^2$$

y la media es casi cero se tiene:

$$s^2_t \cong E[y^2_t] \quad (3).$$

Los gráficos de las autocorrelaciones muestran que hay menos correlación significativa en la tasa en dólares que en la de pesos pues para ésta hay varios valores que quedan fuera de la banda del 95%.

Gráfico 5



También esta vez se calculó la significatividad conjunta de las autocorrelaciones con el estadístico Q de Box-Ljung y, según los resultados que se presentan en el cuadro siguiente, la tasa de depósitos en pesos posee una autocorrelación significativa al 2%, pero no así la de dólares.

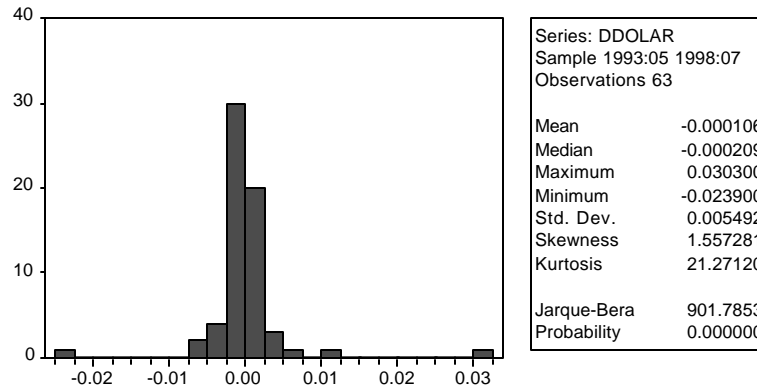
Tabla 3

Estadístico de Box-Ljung		
Serie (varianza)	Q-stat(20 rezag.)	Probabilidad
Tasa en dólares	10.390	0.961
Tasa en pesos	37.032	0.012

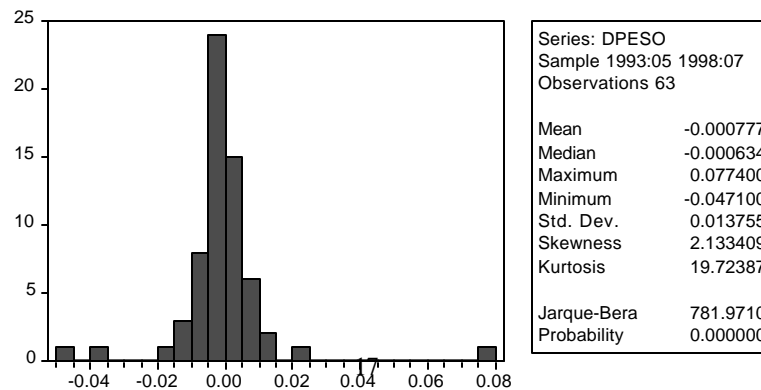
Puede concluirse que la varianza de las primeras diferencias presenta autocorrelación, al menos en el caso de la tasa en pesos, por lo cual resulta aconsejable intentar la modelación sin presuponer la constancia de la varianza. El Gráfico 6 presenta estadísticos sobre ambas series en primeras diferencias. Se comprueba que ambas tienen elevada kurtosis y que el test de Jarque-Bera rechaza su normalidad.

Gráfico 6

Primera diferencia de tasa de dep. en dólares



Primera diferencia de tasa de dep. en pesos



4. Dos modelos alternativos para las tasas de interés de depósitos a plazo fijo en pesos y dólares

Del análisis realizado previamente puede inferirse que sería conveniente considerar modelos en los cuales la volatilidad de la serie a estimar no se mantiene necesariamente constante a través del tiempo. Se consideran a continuación dos tipos de modelos alternativos: (1) el modelo autoregresivo de orden 1, y (2) el modelo GARCH. En las siguientes exposiciones se utilizará la variable $y_t \equiv \Delta R_t$.

A) Modelo Autoregresivo de primer orden (AR(1)).

El modelo autoregresivo de primer orden está dado por:

$$y_t = \alpha_0 + \alpha_1 y_{t-1} + \varepsilon_t, \quad \varepsilon_t \sim N(0, \sigma_\varepsilon^2) \quad (4)$$

donde las ε_t se distribuyen en forma idéntica e independiente. Es conveniente pero no esencial que ε_t tenga una distribución normal.

Si en (4) se reemplaza y_{t-1} por su equivalente como función de y_{t-2} se tiene:

$$\begin{aligned} y_t &= \alpha_0 + \alpha_1 (\alpha_0 + \alpha_1 y_{t-2} + \varepsilon_{t-1}) + \varepsilon_t \\ &= \alpha_0 (1 + \alpha_1) + \alpha_1^2 y_{t-2} + \varepsilon_t + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}, \end{aligned}$$

y, realizando sustituciones sucesivas queda:

$$y_t = \alpha_0 \sum_{i=0}^{t-1} \alpha_1^i + \sum_{i=0}^{t-1} \alpha_1^i \varepsilon_{t-i} + \alpha_1^t y_0 \quad (5).$$

Como ε_t tiene media cero, si se supone que $y_0 = 0$ se tiene:

$$E[y_t] = \alpha_0 \sum_{i=0}^{t-1} \alpha_1^i = \frac{\alpha_0 (1 - \alpha_1^t)}{(1 - \alpha_1)} \quad (6).$$

En el cálculo de la varianza de y_t , en cambio, el segundo término de (5) es esencial. Si $|\alpha_1| < 1$ se tiene:

$$V[y_t] = E[y_t - E[y_t]]^2 = E[y_t - \alpha_0 (1 - \alpha_1^t) / (1 - \alpha_1)]^2$$

$$\begin{aligned}
&= E[\sum_{i=0}^{t-1} \alpha_1^i \varepsilon_{t-i}]^2 = \sum_{i=0}^{t-1} \alpha_1^{2i} E[\varepsilon_{t-i}^2] \\
&= \mathbf{s}_e^2 (1 - \mathbf{a}_1^{2t}) / (1 - \mathbf{a}_1^2)
\end{aligned}$$

La primera igualdad es la definición de la varianza. La segunda igualdad hace uso de (6). La tercera igualdad usa (5) y el supuesto de que $y_0 = 0$. En la cuarta igualdad se tiene en cuenta que las esperanzas de todos los términos cruzados de la sumatoria desaparecen por el supuesto de que los ε_t son independientes en el tiempo. En la última igualdad se toma en cuenta que, para todo i , $E[\varepsilon_{t-i}^2]$ es igual a σ_ε^2 (pues la media de ε_t es cero).

Como tanto la media como la varianza del modelo autoregresivo cambian con t , se trata de un proceso estocástico no estacionario. Existen dos maneras alternativas de convertir al proceso en (débilmente) estacionario :

1) Si se supone que t tiende a infinito, la media (6) y la varianza (7) tienden a

$$\frac{\mathbf{a}_0}{1 - \mathbf{a}_1} \quad \text{y} \quad \frac{\mathbf{s}_e^2}{1 - \mathbf{a}_1^2} ,$$

respectivamente. Se tiene, entonces, estacionariedad asintótica.

2) En lugar de suponer que y_0 es igual a cero, puede suponerse que es aleatorio y sigue la distribución:

$$y_0 \sim N\left(\frac{\mathbf{a}_0}{1 - \mathbf{a}_1}, \frac{\mathbf{s}_e^2}{1 - \mathbf{a}_1^2}\right) .$$

En tal caso, a partir de (5) se deducen:

$$\begin{aligned}
E[y_t] &= \frac{\mathbf{a}_0(1 - \mathbf{a}_1^t)}{1 - \mathbf{a}_1} + \mathbf{a}_1^t E[y_0] \\
&= \frac{\mathbf{a}_0(1 - \mathbf{a}_1^t)}{1 - \mathbf{a}_1} + \mathbf{a}_1^t \frac{\mathbf{a}_0}{1 - \mathbf{a}_1} = \frac{\mathbf{a}_0}{1 - \mathbf{a}_1}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
V[y_t] &= V[\sum_{i=0}^{t-1} \alpha_1^i \varepsilon_{t-i}] + V[\alpha_1^t y_0] \\
&= \sum_{i=0}^{t-1} \alpha_1^{2i} V[\varepsilon_{t-i}] + \alpha_1^{2t} V[y_0] \\
&= \mathbf{s}_e^2 \frac{1 - \mathbf{a}_1^{2t}}{1 - \mathbf{a}_1^2} + \mathbf{a}_1^{2t} \frac{\mathbf{s}_e^2}{1 - \mathbf{a}_1^2} = \frac{\mathbf{s}_e^2}{1 - \mathbf{a}_1^2} ,
\end{aligned}$$

obteniéndose las mismas media y varianza que en 1). En ambos casos, la varianza del error se ve amplificada por el factor $1/(1-\alpha_1^2)$ para llegar a la varianza de y_t .

Hasta ahora se consideró la varianza incondicional. Sin embargo, dada la información de $t-1$ (que incluye a y_{t-1}) la media y la varianza condicionales se obtienen directamente a partir de (4) :

$$E[y_t/y_{t-1}] = \alpha_0 + \alpha_1 y_{t-1}$$

$$V[y_t / y_{t-1}] = E[y_t - \alpha_0 - \alpha_1 y_{t-1}]^2 = E[e_t^2] = \sigma_e^2$$

Se ve que la media condicional varía a lo largo del tiempo y depende del último valor que haya alcanzado la serie y . En cambio, la varianza condicional es constante pero menor que la varianza incondicional. Como dice Hendry (1995): "Mientras la economía evoluciona, vagando ampliamente debido a su gran varianza incondicional, la región en la cual se adentra en el punto siguiente del tiempo es comparativamente pequeña."⁸

B) Modelos de la familia GARCH

En los modelos econométricos usuales (incluyendo el AR(1) de la sección precedente) se supone que la varianza del error es constante. Sin embargo, se vio en el Gráfico 3 que las primeras diferencias de las tasas de interés sobre depósitos a plazo fijo presentan períodos de volatilidad muy elevada así como otros períodos de volatilidad relativamente baja. En tales casos no es apropiado el supuesto de varianza constante (homoscedasticidad). Como demuestran Engle (1982) y Bollerslev (1986), en tales casos puede modelarse simultáneamente la media y la varianza de la serie.

En el caso de los modelos ARCH (Autoregressive Conditional Heteroskedasticity) las ecuaciones a estimar son:

⁸ En lo anterior se ha venido suponiendo que $|\alpha_1| < 1$. Está claro que si $|\alpha_1| > 1$ la serie es explosiva. El caso intermedio, $|\alpha_1| = 1$, es de gran interés. Si se toma $\alpha_1 = 1$ el modelo autoregresivo se convierte en un "random walk". A partir de (5) se obtiene (si $y_0 = 0$):

$$E[y_t] = \alpha_0 t$$

$$V[y_t] = \sigma_e^2 t$$

Ambos momentos aumentan sin límite con el paso del tiempo. Lo correcto en el caso $\alpha_1 = 1$ (o sea, cuando hay una raíz unitaria) es diferenciar la serie.

$$y_t = \pi x_t + \varepsilon_t \quad , \quad \varepsilon_t \sim N(0, \sigma_t^2)$$

$$s_t^2 = w + \sum_{i=1}^q a_i \varepsilon_{t-i}^2 \quad ,$$

donde los ε_t son independientes, x_t es una constante y/o variables explicativas (aunque puede no haberlas) y σ_t^2 es la varianza condicional de ε_t , dada la información de $t-1$ ($\sigma_t^2 = E[\varepsilon_t^2 / \mathcal{F}_{t-1}]$). Se observa que la varianza condicional en el período t depende de una constante y de los residuos al cuadrado de los períodos anteriores (términos ARCH).

Los modelos GARCH (Generalized ARCH) son similares a los ARCH pero en ellos se supone que la varianza condicional también depende de la varianza condicional en los períodos anteriores (términos GARCH). El modelo tiene la siguiente forma:

$$y_t = \pi x_t + \varepsilon_t \quad , \quad \varepsilon_t \sim N(0, \sigma_t^2) \quad (8)$$

$$\sigma_t^2 = \omega + \sum_{i=1}^q \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^p \beta_j \sigma_{t-j}^2 \quad (9)$$

donde q es el orden de los términos ARCH y p es el orden de los términos GARCH. En este tipo de modelos, hay que tener presente que un error en el ajuste de la varianza no daña las estimaciones de la media pero un mal ajuste de la media produce estimaciones inconsistentes de la varianza. Por ello es común especificar primero el modelo para la media.

Un modelo simple y de uso frecuente es el GARCH(1,1), o sea :

$$y_t = \pi x_t + \varepsilon_t \quad , \quad \varepsilon_t \sim N(0, \sigma_t^2) \quad (10)$$

$$\sigma_t^2 = \omega + \alpha \varepsilon_{t-1}^2 + \beta \sigma_{t-1}^2 \quad (11)$$

En este caso, la varianza condicional en el momento t depende de una constante, de los residuos al cuadrado en $t-1$ (el término ARCH) y de la varianza condicional en $t-1$ (el término GARCH). Mediante sustituciones sucesivas y partiendo de valores iniciales σ_0^2 y ε_0 , la ecuación (11) se transforma en:

$$s_t^2 = w \frac{1 - b^t}{(1 - b)} + a \sum_{j=1}^t b^{j-1} \varepsilon_{t-j}^2 + b^t s_0^2 \quad .$$

Se observa en esta expresión que la varianza condicional depende de la suma de los errores al cuadrado precedentes con ponderaciones diferentes, en contraposición a la varianza incondicional en la que no varían las ponderaciones.

Si se suman y restan términos apropiados en (11):

$$\sigma_t^2 = \omega + \alpha \varepsilon_{t-1}^2 + \beta \sigma_{t-1}^2 + \beta \varepsilon_{t-1}^2 - \beta \varepsilon_{t-1}^2 + \varepsilon_t^2 - \varepsilon_t^2$$

y se define

$$v_t = \varepsilon_t^2 - \sigma_t^2 \quad ,$$

se obtiene

$$\varepsilon_t^2 = \omega + (\alpha + \beta) \varepsilon_{t-1}^2 + v_t - \beta v_{t-1} \quad .$$

Esto significa que los errores al cuadrado (la volatilidad) siguen un proceso ARMA(1,1), el cual presenta gran heteroscedasticidad. El coeficiente del término autoregresivo es $(\alpha + \beta)$ y su valor determina la persistencia de los shocks a la volatilidad. Nótese que si su valor es próximo a uno entonces el efecto de los shocks decae lentamente.

En estos modelos los residuos estandarizados $(\varepsilon_t / \sigma_t)$ tienen una distribución normal $N(0,1)$. Se observa que las series financieras suelen tener colas pesadas (con mayor peso que la normal). Aún cuando no se cumpla estrictamente la condición de normalidad, las estimaciones pueden efectuarse mediante métodos robustos, por lo cual los resultados obtenidos no quedan invalidados.

5. Adaptación del modelo VaR para la modelización de ΔR mediante un modelo GARCH(1,1) con término autoregresivo en la media

Si los cambios en la tasa de depósitos ΔR_t se ajustan con un modelo GARCH(1,1) que posee además un término autoregresivo para la media, las ecuaciones correspondientes a (10) y (11) son:

$$\Delta R_t = a_0 + a_1 \Delta R_{t-1} + \varepsilon_t \quad , \quad (12)$$

$$s_t^2 = w + b s_{t-1}^2 + a e_{t-1}^2 \quad , \quad (13)$$

donde $\varepsilon_t = \sigma_t v_t$, $v_t \sim \text{IIN}(0,1)$, σ_t^2 es la varianza condicional de ε_t ($\sigma_t^2 = E[\varepsilon_t^2 / \varepsilon_{t-1}^2]$), α es el coeficiente ARCH y β el coeficiente GARCH. Nótese que α y β deben ser positivos para asegurar que $\sigma_t^2 > 0$.

Puede reescribirse la ecuación (12) de la siguiente manera:

$$\frac{\Delta R_t - a_0 - a_1 \Delta R_{t-1}}{s_t} = \mathbf{n}_t \quad (14) \quad .$$

Obsérvese que los pronósticos condicionales de σ_t^2 dependen de σ_{t-1}^2 y v_{t-1}^2 .

Por la ecuación (1) se tiene:

$$-\Delta VP_t = VP_{t-1} MD_{t-1} \Delta R_t$$

$$-a_1 \Delta VP_{t-1} = a_1 VP_{t-2} MD_{t-2} \Delta R_{t-1}$$

lo que puede escribirse como:

$$\frac{-\Delta VP_t}{VP_{t-1} MD_{t-1}} = \Delta R_t$$

$$\frac{-a_1 \Delta VP_{t-1}}{VP_{t-2} MD_{t-2}} = a_1 \Delta R_{t-1} .$$

Restando la segunda ecuación de la primera se obtiene:

$$\frac{-\Delta VP_t}{VP_{t-1} MD_{t-1}} + \frac{a_1 \Delta VP_{t-1}}{VP_{t-2} MD_{t-2}} = \Delta R_t - a_1 \Delta R_{t-1} .$$

Si se resta a_0 y se tiene en cuenta la igualdad (14) se tiene:

$$\frac{-\Delta VP_t}{VP_{t-1} MD_{t-1}} + \frac{a_1 \Delta VP_{t-1}}{VP_{t-2} MD_{t-2}} - a_0 = \mathbf{s}_t \left(\frac{\Delta R_t - a_0 - a_1 \Delta R_{t-1}}{\mathbf{s}_t} \right) = \mathbf{s}_t \mathbf{n}_t .$$

Al despejar ΔVP_t se obtiene:

$$\Delta VP_t = -VP_{t-1} MD_{t-1} \mathbf{s}_t \mathbf{n}_t - VP_{t-1} MD_{t-1} \left(a_0 - \frac{a_1 \Delta VP_{t-1}}{VP_{t-2} MD_{t-2}} \right) ,$$

y definiendo

$$\mathbf{m}_{t-1} = -VP_{t-1} MD_{t-1} \left(a_0 - \frac{a_1 \Delta VP_{t-1}}{VP_{t-2} MD_{t-2}} \right) ,$$

se obtiene finalmente :

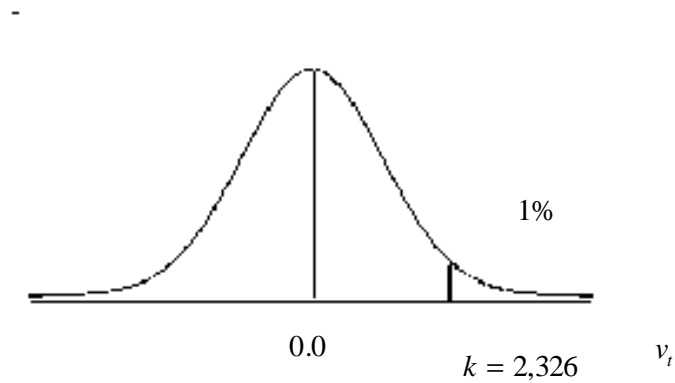
$$\Delta VP_t = -VP_{t-1} MD_{t-1} \sigma_t v_t + \mu_{t-1} .$$

Teniendo en cuenta que $v_t \sim N(0,1)$ y que los demás valores se conocen en t y dependen de la información en $t-1$, la distribución condicional de ΔVP_t es:

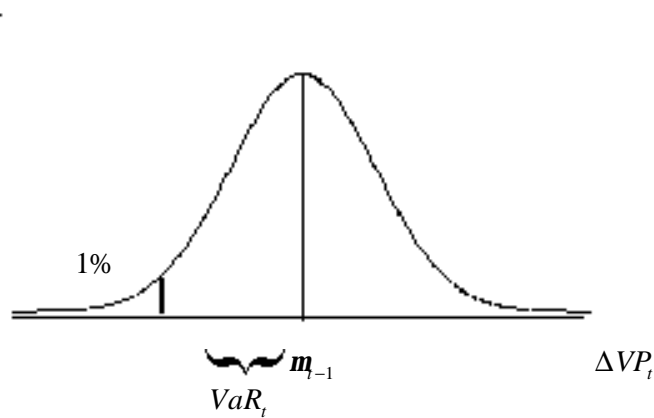
$$\Delta VP_t \sim N(\mu_{t-1}, VP_{t-1}^2 MD_{t-1}^2 \sigma_t^2) .$$

En forma similar a lo descrito en la sección 2, si se considera las distribuciones de v_t y ΔVP_t se observa que cuando v es muy alto (o sea ΔR es muy alto) ΔVP es muy bajo. Como v se distribuye según una normal estandarizada, el valor crítico que sólo es superado por v en el (x=)1% de las veces es ($k=$)2,326. Como ΔVP también se distribuye normalmente, estaría 2,326 veces la varianza por debajo de su media sólo en el 1% de los casos. Ese desvío crítico con

Distribución de v_t



Distribución de ΔVP_t



respecto a la media es el VaR, o sea:

$$VaR_t = k VP_{t-1} MD_{t-1} \sigma_t,$$

donde σ_t se obtiene del pronóstico condicional de la varianza condicional del término de error de la ecuación (12), es decir:

$$\begin{aligned} E_{t-1}[\sigma_t^2] &= E_{t-1}[\omega + \beta \sigma_{t-1}^2 + \alpha \sigma_{t-1}^2 v_{t-1}^2] \\ &= \omega + \beta \sigma_{t-1}^2 + \alpha \sigma_{t-1}^2 E_{t-1}[v_{t-1}^2]. \end{aligned}$$

Entonces se tiene

$$E_{t-1}[\mathbf{s}_t^2] = \mathbf{w} + (\mathbf{a}\mathbf{n}_{t-1}^2 + \mathbf{b})\mathbf{s}_{t-1}^2 \quad (15) ,$$

y por lo tanto

$$VaR_t = kVP_{t-1}MD_{t-1}[\mathbf{w} + (\mathbf{a}\mathbf{n}_{t-1}^2 + \mathbf{b})\mathbf{s}_{t-1}^2]^{1/2} .$$

Un caso particular de lo expuesto es aquel en el cual en la ecuación de la media no interviene la diferencia de la tasa rezagada ($a_1=0$). En ese caso (12) se reduce a:

$$\Delta R_t = a_0 + \sigma_t v_t ,$$

por lo cual directamente a partir de (1) se tiene:

$$\Delta VP_t = -VP_{t-1}MD_{t-1}(a_0 + \sigma_t v_t).$$

En este caso se define

$$\mu_{t-1} = -VP_{t-1}MD_{t-1} a_0,$$

y el resto del argumento es igual que en el caso más general.

6. Resultados de las estimaciones econométricas de los modelos

Luego de corregir por valores extremos, se estimaron tanto modelos autoregresivos como modelos GARCH. Los resultados se presentan en los cuadros siguientes:

Tabla 4

Modelo Autoregresivo serie: $R_t - R_{t-1}$ período: Abril 93 Julio 98	Dólares	Pesos
	S.E. :0.0055	S.E. :0.0138
C	-0.0002 (0.328)	-0.0009 (0.232)
variable(-1)	0.2979 (0.000)	0.06555 (0.307)
dum953	0.0295 (0.000)	0.0776 (0.000)
dum956	-0.0229 (0.000)	
dum9556		-0.0390 (0.000)
dum9711	0.0050 (0.008)	0.0214 (0.000)
S.E. reg.	0.0018	0.0055
R2 ajust.	0.895	0.840
Log likelihood	306.62	237
Chi2(gl)	137(4)(0.000)	112(4)(0.000)
Jarque-Bera	26.45 (0.000002)	0.53 (0.767081)

Los p-value figuran entre paréntesis

Se observa en primer lugar que las correcciones de los valores extremos son muy significativas. En el modelo autoregresivo, el primer rezago de la variable (es decir el valor del período anterior) es significativo para la tasa en dólares pero no para la en pesos. En el test de normalidad se observa que los residuos del modelo de la tasa en dólares difieren significativamente de una distribución normal.

En el modelo GARCH(1,1) para la tasa en pesos no dio significativo el término autoregresivo de ΔR , por lo cual se optó por eliminarlo ($a_1 = 0$ en (12)). En la ecuación de la varianza condicional, el coeficiente que corresponde a la varianza (GARCH) es mucho más significativo que el

coeficiente que corresponde al error (ARCH). El test de Jarque-Bera indica que los residuos estandarizados tienen una distribución aproximadamente normal para la tasa en pesos y no difieren sólo al 3% para la tasa en dólares. También se observa que el valor del coeficiente del término autoregresivo en ambos modelos de la tasa en dólares es prácticamente el mismo.

Tabla 5

Modelo GARCH serie: R_t-R_{t-1} período: Abril 93 Julio 98	Dólares	Pesos
	S.E. :0.0055	S.E. :0.0138
C	-0.0003 (0.111)	-0.0010 (0.041)
variable(-1)	0.2978 (0.008)	
dum953	0.0294 (0.000)	0.0777 (0.000)
dum956	-0.0229 (0.000)	
dum9556		-0.0402 (0.000)
dum9711	0.0048 (0.000)	0.0214 (0.000)
Varianza		
C	4.43E-07 (0.348)	4.33E-06 (0.343)
ARCH(1)	0.1504 (0.407)	0.1692 (0.237)
GARCH(1)	0.6001 (0.039)	0.6103 (0.053)
S.E. reg.	0.0018	0.0058
R2 ajust.	0.888	0.822
Log likelihood	313.99	244.17
Chi2(gl)	152(4)(0.000)	126(3)(0.000)
Jarque-Bera	6.48 (0.039259)	0.51 (0.775337)

Los p-value figuran entre paréntesis

Los estadísticos básicos de los residuos así como sus estadísticos de autocorrelación figuran en el cuadro siguiente:

Tabla 6

Residuos	Media	Varianza	Estadístico de Box-Ljung	
			Q-stat (12 rezag.)	Probabilidad
Modelo Autoregresivo				
Tasa en dólares	-8.2e-20	3.0e-06	13.335	0.345

Tasa en pesos	8.7e-20	2.8e-05	9.482	0.661
Modelo GARCH(*)				
Tasa en dólares	0.057	1.20	11.602	0.478
Tasa en pesos	-0.003	1.11	14.336	0.280

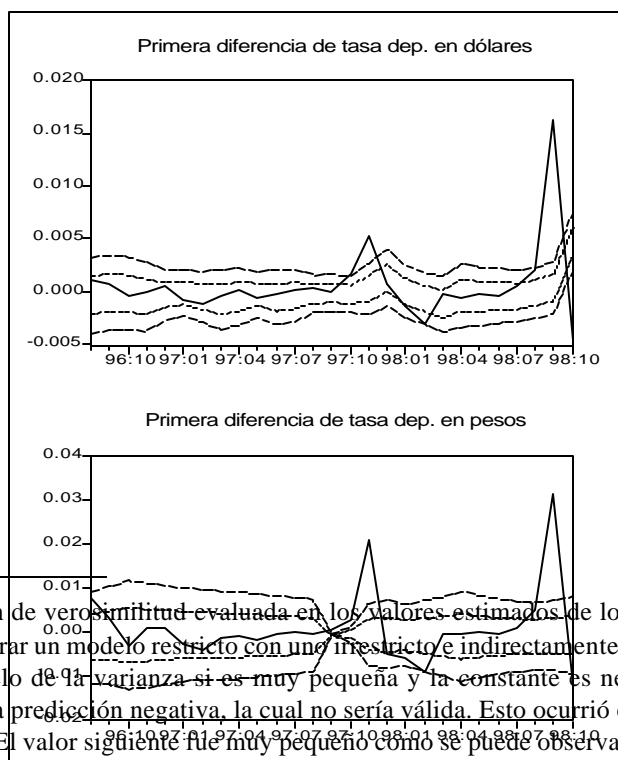
(*) residuos estandarizados

Por los valores que figuran en la tabla se comprueba que los residuos en todos los modelos no tienen autocorrelación significativa y los residuos estandarizados de los modelos GARCH (ϵ_t/σ_t) poseen valores de media y varianza aproximadamente igual a cero y uno, respectivamente, lo que coincide con los supuestos del modelo.

En cuanto al ajuste, los valores "log likelihood"⁹ son levemente superiores en los modelos GARCH, lo que daría la pauta de un mejor ajuste. Se puede observar que $(\alpha+\beta) > 0,75$ en estos modelos, por lo cual el efecto de un shock sobre la varianza condicional decae lentamente.

Fue analizado también el poder predictivo de los modelos GARCH y los resultados de la predicción a un paso se observan en el Gráfico 7. Dado que σ_t^2 es la estimación de la varianza condicional de ΔR_t , σ_{t+1} es el desvío estándar del error de la predicción a un paso de ΔR_{t+1} . Por lo tanto, en el gráfico se presentan los valores de la primera diferencia de las series y las otras líneas corresponden a la predicción de la primera diferencia más y menos σ_{t+1} en un caso y $2 \sigma_{t+1}$ en el otro¹⁰.

Gráfico 7



⁹ Logaritmo de la función de verosimilitud evaluada en los valores estimados de los coeficientes. El test obtenido a partir de él permite comparar un modelo restringido con uno irrestricto e indirectamente dos modelos entre sí.

¹⁰ Nótese que en el modelo de la varianza si es muy pequeña y la constante es negativa (como ocurre en nuestro caso), puede producir una predicción negativa, la cual no sería válida. Esto ocurrió en septiembre de 1997 por lo que se la reemplazó por cero. El valor siguiente fue muy pequeño como se puede observar en el gráfico.

En este caso el gráfico abarca desde agosto de 1996 hasta octubre de 1998 y puede observarse que los únicos valores que quedaron significativamente fuera de las bandas corresponden a noviembre de 1997 (la crisis asiática relacionada con el ataque especulativo del dólar de Hong Kong) y septiembre de 1998 (el inicio de la crisis rusa).

También fueron considerados modelos GARCH(4,4) y modelos autoregresivos que incluyeron hasta el rezago cuarto. En el primer caso ninguno de los términos adicionales ARCH o GARCH fueron significativos. En el caso de los modelos autoregresivos, ninguno de los rezagos adicionales resultó significativo.

7. Adaptación del pronóstico de la varianza condicional para un horizonte temporal mayor a un mes

Por lo expresado en secciones anteriores, para el cálculo del VaR el desvío estándar (σ_t) que debe tenerse en cuenta se obtiene del pronóstico condicional de la varianza condicional del término de error de la ecuación (15), es decir:

$$E_{t-1}[\mathbf{s}_t^2] = \mathbf{w} + (\mathbf{a}\mathbf{s}_{t-1}^2 + \mathbf{b})\mathbf{s}_{t-1}^2 .$$

Si se desea predecir la varianza de una diferencia de tasas de T meses se debe considerar que:

$$\begin{aligned} \Delta R_{t,t+T} &= R_{t,t+T} - R_t \\ &= R_{t+T} - R_{t+T-1} + R_{t+T-1} - R_{t+T-2} + \dots + R_{t+1} - R_t \\ &= \Delta R_{t+T} + \Delta R_{t+T-1} + \dots + \Delta R_{t+1} \quad , \end{aligned}$$

donde cada ΔR_{t+i} puede ser reemplazado por una expresión similar a (12), obteniéndose:

$$\Delta R_{t,t+T} = (a_0 + a_1 \Delta R_{t+T-1} + \mathbf{e}_{t+T}) + \dots + (a_0 + a_1 \Delta R_t + \mathbf{e}_{t+1}) .$$

Si a su vez se reemplaza sucesivamente cada ΔR_{t+i} ($i > 0$) por una expresión en términos de ΔR_t , se obtienen expresiones similares a (5) :

$$\Delta R_{t,t+T} = \sum_{j=1}^T (a_0 \sum_{i=0}^{j-1} a_1^i + \sum_{i=0}^{j-1} a_1^i \mathbf{e}_{t+j-i} + a_1^j \Delta R_t) ..$$

El valor esperado condicional de $\Delta R_{t,t+T}$ es igual a:

$$\begin{aligned} E_t[\Delta R_{t,t+T}] &= E_t[\sum_{j=1}^T (a_0 \sum_{i=0}^{j-1} a_1^i + \sum_{i=0}^{j-1} a_1^i \mathbf{e}_{t+j-i} + a_1^j \Delta R_t)] \\ &= \sum_{j=1}^T (a_0 \sum_{i=0}^{j-1} a_1^i + a_1^j \Delta R_t) \end{aligned}$$

por lo cual la predicción de la varianza condicional de un período de T meses es:

$$E_t[(\Delta R_{t,t+T} - E_t[\Delta R_{t,t+T}])^2] = E_t[(\sum_{j=1}^T (\sum_{i=0}^{j-1} a_1^i \mathbf{e}_{t+j-i}))^2] \quad (16) .$$

Se demuestra en el Apéndice 1 que esta expresión se reduce a:

$$E_t[(\Delta R_{t,t+T} - E_t[\Delta R_{t,t+T}])^2] = \sum_{j=1}^T E_t[\mathbf{s}_{t+j}^2] (\sum_{i=0}^{T-j} a_1^i)^2 .$$

Si en la ecuación de la media no interviene un término autoregresivo ($a_1 = 0$), la expresión se reduce a:

$$E_t[(\Delta R_{t,t+T} - E_t[\Delta R_{t,t+T}])^2] = \sum_{j=1}^T E_t[\mathbf{s}_{t+j}^2] .$$

En el Apéndice 2 se demuestra que el valor esperado de la predicción de la varianza condicional para el momento $t+j$ se puede expresar como:

$$E_t[\mathbf{s}_{t+j}^2] = \mathbf{w} \sum_{i=0}^{j-1} (\mathbf{a} + \mathbf{b})^i + [\mathbf{b}^j + \sum_{i=1}^{j-1} \mathbf{b}^i \mathbf{a}^{j-i} (i + (j-i)\mathbf{n}_t^2) + \mathbf{a}^j \mathbf{n}_t^2] \mathbf{s}_t^2 ,$$

por lo cual la predicción de la varianza condicional de la diferencia de tasas para un período de tiempo T se puede expresar como:

$$\begin{aligned} E_t[(\Delta R_{t,t+T} - E_t[\Delta R_{t,t+T}])^2] &= \\ &= \sum_{j=1}^T [\mathbf{w} \sum_{i=0}^{j-1} (\mathbf{a} + \mathbf{b})^i + (\mathbf{b}^j + \sum_{i=1}^{j-1} \mathbf{b}^i \mathbf{a}^{j-i} (i + (j-i)\mathbf{n}_t^2) + \mathbf{a}^j \mathbf{n}_t^2) \mathbf{s}_t^2] (\sum_{i=0}^{T-j} a_1^i)^2 . \end{aligned}$$

Nuevamente, si en la ecuación de la media no interviene un término autoregresivo la expresión anterior se reduce a:

$$E_t[(\Delta R_{t,t+T} - E_t[\Delta R_{t,t+T}])^2] =$$

$$= \sum_{j=1}^T [w \sum_{i=0}^{j-1} (\mathbf{a} + \mathbf{b})^i + (\mathbf{b}^j + \sum_{i=1}^{j-1} \mathbf{b}^i \mathbf{a}^{j-i} (i + (j-i)\mathbf{n}_t^2) + \mathbf{a}^j \mathbf{n}_t^2) \mathbf{s}_t^2] .$$

En base a los modelos estimados, los desvíos estándar pronosticados para las tasas de depósitos en dólares y pesos para un horizonte de tres meses (y multiplicados por k=2,326) se presentan en el cuadro siguiente:

Tabla 8

Desvíos pronosticados por modelo GARCH (k*σ, k=2,326)		
Serie	Horizonte: 1 mes	Horizonte: 3 meses
Tasa de depósitos en pesos	0.0089	0.0160
Tasa de depósitos en dólares	0.0028	0.0050

Tales son los números que deben multiplicar a $VP_{t-1} MD_{t-1}$ para obtener el Var_t .

8. Utilización de las tasas de interés internacionales como regresores

Se comprueba que existe causalidad en el sentido de Granger desde algunas tasas internacionales (Libor de un mes, Fondos Federales y Letras del Tesoro de EE.UU.) tanto sobre la tasa de depósitos en pesos como sobre la tasa de depósitos en dólares, siendo la más significativa la de los Fondos Federales como se puede observar en el cuadro siguiente:

Tabla 9

Test de Causalidad de Granger (2 rezagos)(*)		
Causalidad (Hipótesis nula)	F-stat.	Probabilidad
La tasa Lib no causa a la tasa en dólares	1.97	0.148
La tasa Lib no causa a la tasa en pesos	2.76	0.072
La tasa de F. Federales no causa a la tasa en dólares	5.44	0.007
La tasa de F. Federales no causa a la tasa en pesos	4.89	0.011
La tasa de L. del Tesoro no causa a la tasa en dólares	2.36	0.104

Test de Causalidad de Granger (2 rezagos)(*)		
La tasa de L. del Tesoro no causa a la tasa en pesos	2.57	0.086

(*) Sólo se presentan las causalidades en una dirección pues en la otra no son significativas

Dada la causalidad de la tasa de los Fondos Federales sobre las tasas de depósitos, la misma fue incorporada en los modelos GARCH. Los resultados obtenidos se presentan en la Tabla 10.

Se observa que en términos generales se obtiene una pequeña mejora en el ajuste de los modelos de las tasas pero empeora la significatividad del coeficiente ARCH del modelo de la tasa en dólares y de los coeficientes GARCH.

Tabla 10

Modelo GARCH serie: $R_t - R_{t-1}$ período: Abril 93 Julio 98	Dólares S.E. :0.0055	Pesos S.E. :0.0138
C	-0.0006 (0.003)	-0.0016 (0.002)
variable(-1)	0.2325 (0.022)	
dum953	0.0281 (0.000)	0.0737 (0.000)
dum956	-0.0229 (0.000)	
dum9556		-0.0406 (0.000)
dum9711	0.0056 (0.000)	0.0229 (0.000)
Tasa de los Fondos Federales(-1)	0.4005 (0.003)	1.1709 (0.002)
Tasa de los Fondos Federales(-2)	0.4557 (0.000)	1.1709 (0.005)
Varianza		
C	3.82E-07 (0.541)	3.78E-06 (0.343)
ARCH(1)	0.1500 (0.613)	0.1511 (0.193)
GARCH(1)	0.6000 (0.308)	0.6012 (0.131)
S.E. reg.	0.0016	0.0051

R2 ajust.	0.914	0.865
Log likelihood	315.04	245.44
Chi2(gl)	154(6)(0.000)	128(5)(0.000)
Jarque-Bera	4.124 (0.127227)	1.258 (0.533150)

Los p-value figuran entre paréntesis

Los residuos estandarizados en ambos modelos poseen valores de media y varianza aproximadamente igual a cero y uno, respectivamente y no tienen autocorrelación significativa, como se puede comprobar en el cuadro siguiente:

Tabla 11

Residuos estandarizados	Media	Varianza	Estadístico de Box-Ljung	
			Q-stat (12 rezag.)	Probabilidad
Modelo GARCH con Tasa Fondos Federales				
Tasa en dólares	0.054	1.18	11.092	0.521
Tasa en pesos	-0.010	1.07	11.912	0.453

Por lo expuesto previamente, si bien al introducir en los modelos la tasa de los Fondos Federales mejora el ajuste, al perder significatividad los términos ARCH y GARCH que son importantes para la predicción de la varianza condicional parece mejor realizar dichas predicciones con los modelos presentados en la Tabla 5.

9. Conclusiones

En este trabajo se mostró que las tasas de interés sobre depósitos a plazo fijo en pesos y en dólares pueden modelarse en forma satisfactoria con modelos AR(1) y GARCH(1,1) sobre las primeras diferencias, obteniéndose un ajuste mejor en el último. Como los modelos GARCH estiman una ecuación autoregresiva para la varianza condicional del error de una ecuación autoregresiva para ΔR_t , puede usarse esa ecuación para realizar un pronóstico condicional de la varianza condicional. Este pronóstico puede utilizarse en el cálculo del valor a riesgo (VaR) que surge al evaluar el riesgo de tasa de interés (RTI).

Se mostró cómo obtener el VaR, o sea, el requisito de capital por RTI, cuando el desvío estándar proviene de una estimación GARCH. Además, se mostró cómo debe adaptarse el modelo para un horizonte temporal (en el cual quieren acotarse las pérdidas por RTI) de varios meses cuando las series usadas son de frecuencia mensual.

Los números obtenidos permiten contar con una referencia al determinarse los parámetros a utilizar en la implementación del nuevo requisito de capital por RTI que los bancos deben integrar en Argentina desde marzo de 1999.

Por último, se comprobó que ciertas tasas de interés internacionales, en particular la tasa de fondos federales de EE.UU. causan en el sentido de Granger a las tasas argentinas (todas en primeras diferencias). Por ello, se incluyó la tasa de fondos federales en la estimación del modelo GARCH, sin obtenerse una mejora apreciable en el ajuste.

Apéndice 1

Dado un modelo GARCH, la predicción de la varianza condicional de un período de T meses es igual a (ver 16)):

$$E_t[(\Delta R_{t,t+T} - E_t[\Delta R_{t,t+T}])^2] = E_t[(\sum_{j=1}^T (\sum_{i=0}^{j-1} a_i^j \mathbf{e}_{t+j-i}))^2]$$

que puede expresarse como:

$$E_t[(\Delta R_{t,t+T} - E_t[\Delta R_{t,t+T}])^2] = E_t[(\sum_{j=1}^T \mathbf{e}_{t+j} (\sum_{i=0}^{T-j} a_i^j))^2].$$

Si se define

$$M_j = \mathbf{e}_{t+j} (\sum_{i=0}^{T-j} a_i^j)$$

se tiene

$$E_t[(\Delta R_{t,t+T} - E_t[\Delta R_{t,t+T}])^2] = E_t[(\sum_{j=1}^T M_j)^2] \quad ,$$

que por la fórmula multinomial es igual a

$$\begin{aligned} E_t[(\Delta R_{t,t+T} - E_t[\Delta R_{t,t+T}])^2] &= E_t[\sum_{n_1+\dots+n_T=2} \frac{2}{n_1! \dots n_T!} M_1^{n_1} \dots M_T^{n_T}] \\ &= E_t[\sum_{j=1}^T M_j^2 + \sum_{n_1+\dots+n_T=2, n_i \neq 2} \frac{2}{n_1! \dots n_T!} M_1^{n_1} \dots M_T^{n_T}] \quad . \end{aligned}$$

Reemplazando M_j por su expresión y recordando que $\mathbf{e}_{t+j} = \sigma_{t+j} \mathbf{v}_{t+j}$ se tiene

$$E_t[(\Delta R_{t,t+T} - E_t[\Delta R_{t,t+T}])^2] = E_t[\sum_{j=1}^T \mathbf{s}_{t+j}^2 \mathbf{n}_{t+j}^2 (\sum_{i=0}^{T-j} a_i^j)^2 +$$

$$\sum_{n_1+\dots+n_T=2, n_i \neq 2} \frac{2}{n_1! \dots n_T!} (\mathbf{s}_{t+1} \mathbf{n}_{t+1} (\sum_{i=0}^{T-1} a_1^i))^{n_1} \dots (\mathbf{s}_{t+T} \mathbf{n}_{t+T} (\sum_{i=0}^{T-T} a_1^i))^{n_T}]$$

Por consiguiente

$$E_t[(\Delta R_{t,t+T} - E_t[\Delta R_{t,t+T}])^2] = \sum_{j=1}^T E_t[\mathbf{s}_{t+j}^2 \mathbf{n}_{t+j}^2 (\sum_{i=0}^{T-j} a_1^i)^2] + \sum_{n_1+\dots+n_T=2, n_i \neq 2} \frac{2}{n_1! \dots n_T!} E_t[(\mathbf{s}_{t+1} \mathbf{n}_{t+1} (\sum_{i=0}^{T-1} a_1^i))^{n_1}] \dots E_t[(\mathbf{s}_{t+T} \mathbf{n}_{t+T} (\sum_{i=0}^{T-T} a_1^i))^{n_T}] ,$$

y se obtiene

$$E_t[(\Delta R_{t,t+T} - E_t[\Delta R_{t,t+T}])^2] = \sum_{j=1}^T E_t[\mathbf{s}_{t+j}^2] (\sum_{i=0}^{T-j} a_1^i)^2$$

donde la esperanza de los términos cruzados desaparece por la condición de $v_t \sim \text{IIN}(0,1)$. Por lo expuesto, el valor esperado de la predicción de la varianza condicional de un período de T meses se obtiene a partir de los respectivos valores esperados de las predicciones de las varianzas condicionales de los períodos integrantes.

Apéndice 2

Cuando se estiman modelos GARCH, para poder predecir la varianza condicional de un período de tiempo de tamaño T, se deben obtener las predicciones individuales de la varianza de los períodos que componen el mismo y luego agregarlos.

Por (13) la expresión de la varianza condicional en t+1 es igual a:

$$\mathbf{s}_{t+1}^2 = \mathbf{w} + \mathbf{b}\mathbf{s}_t^2 + \mathbf{a}\mathbf{e}_t^2 \quad ,$$

y su valor esperado es:

$$\begin{aligned} E_t[\mathbf{s}_{t+1}^2] &= E_t[\mathbf{w} + \mathbf{b}\mathbf{s}_t^2 + \mathbf{a}\mathbf{s}_t^2 \mathbf{n}_t^2] \\ &= \mathbf{w} + (\mathbf{b} + \mathbf{a}\mathbf{n}_t^2) \mathbf{s}_t^2 \quad . \end{aligned}$$

El valor esperado de la varianza condicional para el período t+2 es igual a:

$$\begin{aligned}
E_t[\mathbf{s}_{t+2}^2] &= E_t[\mathbf{w} + (\mathbf{b} + \mathbf{a}\mathbf{n}_{t+1}^2)\mathbf{s}_{t+1}^2] \\
&= E_t[\mathbf{w} + (\mathbf{b} + \mathbf{a}\mathbf{n}_{t+1}^2)[\mathbf{w} + (\mathbf{b} + \mathbf{a}\mathbf{n}_t^2)\mathbf{s}_t^2]] \\
&= E_t[\mathbf{w}(1 + (\mathbf{b} + \mathbf{a}\mathbf{n}_{t+1}^2)) + (\mathbf{b} + \mathbf{a}\mathbf{n}_{t+1}^2)(\mathbf{b} + \mathbf{a}\mathbf{n}_t^2)\mathbf{s}_t^2] \\
&= E_t[\mathbf{w}(1 + (\mathbf{b} + \mathbf{a}\mathbf{n}_{t+1}^2)) + (\mathbf{b}^2 + \mathbf{b}\mathbf{a}\mathbf{n}_t^2 + \mathbf{b}\mathbf{a}\mathbf{n}_{t+1}^2 + \mathbf{a}^2\mathbf{n}_{t+1}^2\mathbf{n}_t^2)\mathbf{s}_t^2] \\
&= \mathbf{w}(1 + \mathbf{b}) + E_t[\mathbf{w}\mathbf{a}\mathbf{n}_{t+1}^2] + \mathbf{b}^2\mathbf{s}_t^2 + E_t[\mathbf{b}\mathbf{a}\mathbf{s}_t^2\mathbf{n}_t^2] + E_t[\mathbf{b}\mathbf{a}\mathbf{s}_t^2\mathbf{n}_{t+1}^2] + E_t[\mathbf{a}^2\mathbf{s}_t^2\mathbf{n}_{t+1}^2\mathbf{n}_t^2].
\end{aligned}$$

Como para todo $i > t$ $v_{t+i} \sim \text{IIN}(0,1)$, se tiene $E_t[\mathbf{n}_{t+i}^2\mathbf{n}_t^2] = \mathbf{n}_t^2$,

por lo cual queda:

$$E_t[\mathbf{s}_{t+2}^2] = \mathbf{w}[1 + (\mathbf{b} + \mathbf{a})] + [\mathbf{b}^2 + \mathbf{a}\mathbf{b}(1 + \mathbf{n}_t^2) + \mathbf{a}^2\mathbf{n}_t^2]\mathbf{s}_t^2.$$

De la misma manera, si se considera el período t+3 se tiene:

$$\begin{aligned}
E_t[\mathbf{s}_{t+3}^2] &= E_t[\mathbf{w} + (\mathbf{b} + \mathbf{a}\mathbf{n}_{t+2}^2)\mathbf{s}_{t+2}^2] \\
&= E_t[\mathbf{w} + (\mathbf{b} + \mathbf{a}\mathbf{n}_{t+2}^2)[\mathbf{w}(1 + (\mathbf{b} + \mathbf{a}\mathbf{n}_{t+1}^2)) + (\mathbf{b}^2 + \mathbf{b}\mathbf{a}\mathbf{n}_t^2 + \mathbf{b}\mathbf{a}\mathbf{n}_{t+1}^2 + \mathbf{a}^2\mathbf{n}_{t+1}^2\mathbf{n}_t^2)\mathbf{s}_t^2]] \\
&= E_t[\mathbf{w} + \mathbf{w}(\mathbf{b} + \mathbf{a}\mathbf{n}_{t+2}^2) + \mathbf{w}(\mathbf{b} + \mathbf{a}\mathbf{n}_{t+2}^2)(\mathbf{b} + \mathbf{a}\mathbf{n}_{t+1}^2) + \\
&\quad (\mathbf{b} + \mathbf{a}\mathbf{n}_{t+2}^2)(\mathbf{b}^2 + \mathbf{b}\mathbf{a}\mathbf{n}_t^2 + \mathbf{b}\mathbf{a}\mathbf{n}_{t+1}^2 + \mathbf{a}^2\mathbf{n}_{t+1}^2\mathbf{n}_t^2)\mathbf{s}_t^2] \\
&= E_t[\mathbf{w} + \mathbf{w}(\mathbf{b} + \mathbf{a}\mathbf{n}_{t+2}^2) + \mathbf{w}(\mathbf{b}^2 + \mathbf{b}\mathbf{a}\mathbf{n}_{t+1}^2 + \mathbf{b}\mathbf{a}\mathbf{n}_{t+2}^2 + \mathbf{a}^2\mathbf{n}_{t+2}^2\mathbf{n}_{t+1}^2) + \\
&\quad \mathbf{s}_t^2[\mathbf{b}^3 + \mathbf{b}^2\mathbf{a}\mathbf{n}_t^2 + \mathbf{b}^2\mathbf{a}\mathbf{n}_{t+1}^2 + \mathbf{b}\mathbf{a}^2\mathbf{n}_{t+1}^2\mathbf{n}_t^2 + \mathbf{b}^2\mathbf{a}\mathbf{n}_{t+2}^2 + \mathbf{b}\mathbf{a}^2\mathbf{n}_{t+2}^2\mathbf{n}_t^2 + \\
&\quad \mathbf{b}\mathbf{a}^2\mathbf{n}_{t+2}^2\mathbf{n}_{t+1}^2 + \mathbf{a}^3\mathbf{n}_{t+2}^2\mathbf{n}_{t+1}^2\mathbf{n}_t^2]] \\
&= E_t[\mathbf{w}(1 + \mathbf{b} + \mathbf{b}^2)] + E_t[\mathbf{w}\mathbf{a}\mathbf{n}_{t+2}^2] + E_t[\mathbf{w}\mathbf{b}\mathbf{a}\mathbf{n}_{t+1}^2] + E_t[\mathbf{w}\mathbf{b}\mathbf{a}\mathbf{n}_{t+2}^2] + E_t[\mathbf{w}\mathbf{a}^2\mathbf{n}_{t+2}^2\mathbf{n}_{t+1}^2] + \\
&\quad E_t[\mathbf{s}_t^2\mathbf{b}^3] + E_t[\mathbf{s}_t^2\mathbf{b}^2\mathbf{a}\mathbf{n}_t^2] + E_t[\mathbf{s}_t^2\mathbf{b}^2\mathbf{a}\mathbf{n}_{t+1}^2] + E_t[\mathbf{s}_t^2\mathbf{b}\mathbf{a}^2\mathbf{n}_{t+1}^2\mathbf{n}_t^2] + E_t[\mathbf{s}_t^2\mathbf{b}^2\mathbf{a}\mathbf{n}_{t+2}^2] +
\end{aligned}$$

$$E_t[\mathbf{s}_i^2 \mathbf{b} \mathbf{a}^2 \mathbf{n}_{i+2}^2 \mathbf{n}_i^2] + E_t[\mathbf{s}_i^2 \mathbf{b} \mathbf{a}^2 \mathbf{n}_{i+2}^2 \mathbf{n}_{i+1}^2] + E_t[\mathbf{s}_i^2 \mathbf{a}^3 \mathbf{n}_{i+2}^2 \mathbf{n}_{i+1}^2 \mathbf{n}_i^2] .$$

Nuevamente, como para todo $i > t$ $v_{t+i} \sim \text{IIN}(0,1)$, cuando se calculan los valores esperados los términos cruzados se multiplican¹¹ y por lo tanto:

$$E_t[\mathbf{s}_{i+3}^2] = \mathbf{w}[1 + (\mathbf{b} + \mathbf{a}) + (\mathbf{b} + \mathbf{a})^2] + [\mathbf{b}^3 + \mathbf{b}^2 \mathbf{a}(2 + \mathbf{n}_i^2) + \mathbf{b} \mathbf{a}^2(1 + 2\mathbf{n}_i^2) + \mathbf{a}^3 \mathbf{n}_i^2] \mathbf{s}_i^2 .$$

En forma inductiva¹² puede llegarse a la expresión general :

$$E_t[\mathbf{s}_{i+j}^2] = \mathbf{w}[1 + (\mathbf{b} + \mathbf{a}) + (\mathbf{b} + \mathbf{a})^2 + \dots + (\mathbf{b} + \mathbf{a})^{j-1}] +$$

$$[\mathbf{b}^j + \sum_{i=1}^{j-1} \mathbf{b}^i \mathbf{a}^{j-i} (i + (j-i)\mathbf{n}_i^2) + \mathbf{a}^j \mathbf{n}_i^2] \mathbf{s}_i^2$$

$$E_t[\mathbf{s}_{i+j}^2] = \mathbf{w}[\sum_{i=1}^{j-1} (\mathbf{b} + \mathbf{a})^{i-1}] +$$

$$[\mathbf{b}^j + \sum_{i=1}^{j-1} \mathbf{b}^i \mathbf{a}^{j-i} (i + (j-i)\mathbf{n}_i^2) + \mathbf{a}^j \mathbf{n}_i^2] \mathbf{s}_i^2 .$$

¹¹ Si se tiene dos variables aleatorias :

$$X \sim \mu_x + \sigma_x Z_x \quad , \quad Y \sim \mu_y + \sigma_y Z_y \quad ,$$

donde las distribuciones Z son independientes y estandarizadas (0,1) y en principio pueden tener cualquier distribución, entonces se puede demostrar que:

$$E[X^2 Y^2] = \mu_x^2 \mu_y^2 + \mu_x^2 \sigma_y^2 + \mu_y^2 \sigma_x^2 + \sigma_x^2 \sigma_y^2 .$$

¹² Si se tiene tres distribuciones : $\theta_x \theta_y \theta_z$ con las mismas condiciones que en nota 4 ($\theta_i \sim \mu_i + \sigma_i Z_i$, Z_i estandarizado (0,1), $i=x,y,z$), se puede demostrar que :

$$E[\theta_x^2 \theta_y^2 \theta_z^2] = \mu_x^2 \mu_y^2 \mu_z^2 + \mu_x^2 \mu_z^2 \sigma_y^2 + \mu_x^2 \mu_y^2 \sigma_z^2 + \mu_y^2 \mu_z^2 \sigma_x^2 + \mu_x^2 \sigma_y^2 \sigma_z^2 + \mu_y^2 \sigma_x^2 \sigma_z^2 + \mu_z^2 \sigma_x^2 \sigma_y^2 + \sigma_x^2 \sigma_y^2 \sigma_z^2 .$$

Por inducción se puede demostrar que si se tiene $\theta_1, \dots, \theta_n$ distribuciones, tal que $\theta_i \sim \mu_i + \sigma_i Z_i$, entonces :

$$E[\theta_1^2 \dots \theta_n^2] = \sum_{k=0, \dots, n} [\prod_{j \in S(N,k)} (\sigma_j^2 \prod_{m=S(N)-j} \mu_m^2)] ,$$

donde $S(N) = \{1, 2, 3, \dots, N\}$ y $s(N, k) = \{j_1, \dots, j_k \mid 1 \leq j_1 < \dots < j_k \leq N, k \leq N\}$.

Bibliografía

Basle Committee on Banking Supervision. "Measurement of Banks' Exposure to Interest Rate Risk". April 1993.

Bollerslev, Tim. "Generalized Autoregressive Conditional Heteroscedasticity". *Journal of Econometrics* 31 (1986), 307-27.

Charemza W.W. y Deadman D.F.. "New Directions in Econometric Practice". *Edward Elgar Publishing Limited, 1993.*

Dickey, D.A. y Fuller, W.A.. "Distributions of the Estimators of Autoregressive Time Series with a Unit Root". *Journal of the American Statistical Association* 74, pp.427-431.

Enders, W. "Applied Econometric Time Series". *John Wiley & Sons, Inc. 1995.*

Engle, Robert F. "Autoregressive Conditional Heteroscedasticity with Estimates of the Variance of United Kingdom Inflation". *Econometrica* 50 (July 1982), 987-1007.

Flannery M.J., Hameed A.S., Harjes R.H. "Asset pricing, time-varying risk premia and interest rate risk". *Journal of Banking & Finance* 21, (1997), 315-335.

Hendry David F. "Dynamic Econometrics". *Oxford University Press. 1995.*

Houpt, James V. y James A. Embersit. "A Method for Evaluating IRR in U.S. Commercial Banks". *Federal Reserve Bulletin*, August 1991.

Jorion, Philippe. Value at Risk : The New Benchmark for Controlling Market Risk . University of California, Irvine. *Mc Graw-Hill*, 1997.

Powell, Andrew y Verónica Balzarotti. "Capital Requirements for Latin American Banks in Relation to their Market Risks: the Relevance of the Basle 1996 Amendment to Latin America". *Banco Central de la República Argentina*, Agosto 1996.

Risk Metrics-Technical Document, *Morgan Guaranty Trust Co*, New York, 1996.

Wright, David M. y James V. Houpt. "An Analysis of Commercial Bank Exposure to Interest Rate Risk", *Federal Reserve Bulletin*, February 1996.